8

Algebra e Geometria
Suppl. B.U.M.I. - Vol. 2 - 1980

ALCUNI TIPI DI VARIETA' V_2^3 DI $S_{4,q}$ E SOTTOPIANI DI BAER

Rita Vincenti (Perugia) (*) (**)

SUMMARY. *If* Π *is a desarguesian plane of order* q^2 *, it can be represented by* $\Sigma=S_{4,q}$ *, fixing a spread* S *of a hyperplane* Σ'*. Denoting by* l_∞ *the line of* Π *corresponding to* S *, it is known that a Baer subplane* B *of* Π *such that* $B\cap l_\infty$ *is a line of* B *, is represented by a plane* β *of* Σ *, where* $\beta\cap\Sigma'$ *is not a line of* S *. We prove that* B *is a Baer subplane of* Π *such that* $|B\cap l_\infty|= 1$ *, if and only if* B *is represented by a variety* V_2^3 *of* Σ *of dimension 2 and order 3 .*

INTRODUZIONE.

E' noto come ad un piano di traslazione Π di ordine q^2 , si può associare una sua rappresentazione iperspaziale $\Pi(\Sigma ,\Sigma ',S)$ (cfr. [4], [5]) in cui gli elementi della fibrazione S rappresentano i punti della retta l_∞ rispetto alla quale Π è di traslazione. In [9] , rappresentando Π con lo spazio $\Sigma =S_{4,q}$, si sono caratterizzati i sottoinsiemi di punti di Σ che corrispondono a quei sottopiani di Baer del piano che hanno $q+1$ punti a comune con la retta l_∞.

In questa nota, si caratterizzano i sottoinsiemi di punti di Σ che rappresentano sottopiani di Baer di un piano desarguesiano Π di ordine q^2 che intersecano la retta l_∞ in un solo punto.

Si è trovato che tali sottopiani di Baer di Π che denomineremo *"propriamente proiettivi"* , vengono a corrispondere alle varietà proiettive V_2^3 rigate di Σ che si ottengono mediante certi isomorfismi birazionali tra una retta L della fibrazione S dell'iperpiano Σ' di Σ ed una conica E di un piano α di Σ con $L'= \alpha\cap\Sigma' \in S$ e con $E\cap L' = \emptyset$. Queste varietà sono esprimibili come interse-

---

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del GNSAGA del CNR.

(**) Istituto Matematico, Via Vanvitelli 1 , Perugia .

zione non completa di due coni quadrici C e Q così fatti : C ha per vertice la retta L e proietta i punti di E ; Q ha per vertice un punto di E e proietta un regolo R di S con L ed L' appartenenti ad S .

Nel primo paragrafo di questa nota, si sono ottenute alcune proprietà delle V_2^3 di Σ che ci serviranno nel seguito.

Nel secondo paragrafo, si dimostra che se A è il piano affine $\Pi - l_\infty$ ed A' è lo spazio affine $\Sigma - \Sigma'$, il gruppo delle affinità di A è immergibile nel gruppo delle affinità di A' e che un elemento di A è fisso per una affinità di A se e solo se l'elemento corrispondente in A' è fisso per la corrispondente affinità di A'.

Si dimostra infine che le V_2^3 di Σ del tipo citato, rappresentano tutti e soli i sottopiani di Baer di Π propriamente proiettivi, passanti per un medesimo (opportuno) punto improprio P di Π e per lo stesso insieme di q+1 punti di una retta di Π non passante per P .

1. ALCUNI RISULTATI SULLE V_2^3 DI $S_{4,q}$.

Sia F un campo di Galois GF(q) di caratteristica dispari, $\bar{F}$ sia il campo chiusura algebrica di F . Denotiamo con Σ lo spazio proiettivo 4-dimensionale sopra F ; lo spazio Σ si può pensare immerso nello spazio $\bar{\Sigma}$ 4-dimensionale sopra $\bar{F}$. Se $\mathcal{V}_k^n$ è una varietà proiettiva di dimensione k ed ordine n (cfr. [3], [8]) espressa mediante polinomi $f_i \varepsilon F[X_o,\dots,X_r]$, intendiamo denotare con V_k^n l'insieme dei punti razionali della varietà $\mathcal{V}_k^n$, ossia è $V_k^n = \mathcal{V}_k^n \cap \Sigma$.

Siano S_1 e C^2 rispettivamente una retta ed una conica non degenere di Σ, S_2 il piano di Σ contenente C^2 , $\psi : S_1 \to C^2$ una biiezione.

Supponiamo che siano soddisfatte le seguenti condizioni :

C1) gli spazi S_1 ed S_2 sono sghembi ;

C2) la corrispondenza ψ è un isomorfismo birazionale (cfr. [3] p.203 , [8] p.10).

<u>LEMMA 1.1</u> - <u>La varietà rigata proiettiva di Σ che si ottiene congiungendo i punti di S_1 e C^2 che si corrispondono mediante ψ , è una V_2^3</u> (cfr. [3] , p.290) .

Dim.:

La dimostrazione è come in [3] relativamente al caso r=4 ; se indichiamo

<u>V_2^3 è la sola retta S_1</u> .

Dim.:

E' sufficiente scegliere una retta r di S_2 che sia esterna alla conica C^2 e considerare l' S_3 congiungente S_1 ed r .

L'elemento s di F che compare nelle (1.0) , sia un non quadrato; si noti allora che rispetto al riferimento scelto per Σ , l' S_3 di equazione $t=0$ è nelle condizioni del Lemma 1.2 : contiene la retta S_1 ed interseca l' S_2 contenente la C^2 , nella retta $y_1=y_2=t=0$ che è esterna a C^2 poichè l'equazione in λ, $\lambda^2-s=0$ non ha soluzioni in F. Si noti infine che il punto origine O del riferimento di Σ è un punto della conica .

Si denoti con Σ' l'iperpiano di Σ che nel riferimento fissato ha equazione $t=0$. Sia assegnata una fibrazione regolare $\mathcal{S}$ di Σ' in modo tale che la retta S_1 e la retta $S_2 \cap \Sigma'$ appartengano ad $\mathcal{S}$. D'ora in avanti denoteremo con :

(1.1) $L(\infty)$ ed $L(0)$, rispettivamente, le rette S_1 ed $S_2 \cap \Sigma'$;

sia inoltre :

X il piano S_2 ; $\mathcal{E}$ la conica C^2 ;

(1.2) Y il piano congiungente O con $L(\infty)$;

r la retta di Y congiungente O con il punto $\bar{O}=\psi^{-1}(O)$, $\bar{O}\in L(\infty)$.

Si consideri il cono quadrico C di Σ di vertice la retta $L(\infty)$, cosituito dai q+1 piani per $L(\infty)$ proiettanti i punti della conica $\mathcal{E}$; indichiamo con $\mathcal{P}$ l'insieme dei q+1 piani di C . Sia infine $\mathcal{F}$ il fascio dei q+1 iperpiani di Σ di sostegno il piano X .

<u>PROPOSIZIONE 1.2 - La corrispondenza $\psi: L(\infty) \to \mathcal{E}$ induce una corrispondenza $\bar{\psi}: \mathcal{F} \to \mathcal{P}$ in modo tale che la varietà V_2^3 che si ottiene congiungendo i punti di $L(\infty)$ e di $\mathcal{E}$ che si corrispondono attraverso ψ , è la varietà che si ottiene intersecando gli elementi di $\mathcal{F}$ e di $\mathcal{P}$ che si corrispondono attraverso $\bar{\psi}$</u> .

Dim.:

Per ogni elemento $\bar{S}_3 \in \mathcal{F}$, $\bar{S}_3 = P \cup X$, $P \in L(\infty)$, si definisca :

$\bar{S}_3\, \bar{\psi} = \bar{S}_2$, $\bar{S}_2 \in \mathcal{P}$ e tale che si abbia $\bar{S}_2 = L(\infty) \cup P\psi$.

ta da q generatrici principali della V_2^3 e dal piano Y tangente la V_2^3 lungo la ulteriore generatrice .

NOTA 1.1 - Per avere le equazioni cartesiane della V_2^3 è sufficiente, eseguendo un'altra sostituzione del parametro, ottenere la V_3^3 di Σ che si esprime con la seguente equazione :

(1.4''') $\quad x_2(y_1^2 - s\, y_2^2) = y_1^2\, t$.

Allora la V_2^3 si rappresenta mediante il sistema delle (1.4),(1.4'),(1.4''').

NOTA 1.2 - Se P è un punto della conica E , il piano del cono C che proietta P , ha in comune con la V_2^3 la direttrice minima $L(\infty)$ e la generatrice principale g_P passante per P.

COROLLARIO 1.3 - Ogni V_2^3 di Σ definita mediante una corrispondenza tra una retta e una conica soddisfacenti le condizioni C1) e C2) , si può ottenere come intersezione definita di due coni quadrici.

TEOREMA 1.2 - La V_2^3 intersezione definita dei coni quadrici C e Q_m , si può ottenere mediante almeno un isomorfismo birazionale $\psi_a : L(\infty) \to E$.

Dim.:

La V_2^3 intersezione definita dei coni C e Q_m si esprime mediante il seguente sistema di equazioni :

(1.5) $\quad s x_2^2 - x_1^2 - s x_2\, t = 0$

(1.5') $\quad (m_2 x_1 + m_1 x_2) y_1 - (m_1 x_1 + s m_2 x_2) y_2 = 0$.

Se si parametrizza la (1.5), ponendo

(1.6) $\quad x_1 = (-as)(a^2-s)^{-1} t$

e

(1.6') $\quad x_2 = a^2 (a^2-s)^{-1} t$,

dalla (1.5') si ottiene :

(1.6") $\quad y_1 = s(m_2 a - m_1)(m_1 a - s m_2)^{-1} y_2$.

Se si interpretano le terne (x_1, x_2, t) e le coppie (y_1, y_2), rispettivamente come coordinate proiettive interne del piano X e della retta $L(\infty)$, si ha che le (1.6) (1.6'), (1.6") rappresentano un isomorfismo birazionale $\psi_a : L(\infty) \to E$ che definisce la V_2^3 . Si noti che per ottenere tutti i punti della V_2^3 , si deve considerare rappresentata anche la retta che si ottiene per il valore "limite" del parametro a , $a=sm_2m_1^{-1}$.

LEMMA 1.3 - Ogni piano α del cono Q_w , $\alpha\neq Y$, interseca il cono C in una conica non degenere.

COROLLARIO 1.4 - Le q coniche dei piani di Q_w e la retta $r=O\bar{O}$, ricoprono la V_2^3.

Dim.:

L'asserto del Corollario è conseguenza del Corollario 1.2 e del fatto che le q coniche e la retta r (intersezione dei piani di Q_w con la V_2^3) hanno tutte a comune il punto O.

Per dimostrare il Lemma, si consideri il piano α di Q_w . Se è $\alpha=X$, si ha che $\alpha\cap C$ è la conica E . Se è $\alpha\neq X$, si consideri l'S_3 congiungente α e la retta $r=O\bar{O}$; tale S_3 taglia il cono C secondo un cono $\bar{C}$ di vertice $\bar{O}$. Infatti, se $S_3\cap C$ fosse un solo piano, esso conterrebbe r , quindi tale piano dovrebbe essere Y ; in questo caso l'S_3 conterrebbe due piani, α e Y che si intersecano in un solo punto, e ciò è assurdo. Se $S_3\cap C$ fossero due piani, sarebbero due piani Y e γ del cono C passanti per r ; allora al cono C apparterrebbe la retta $L(\infty)$ ed una altra retta $t=\gamma\cap\Sigma'$ con $\gamma\cap L(\infty) = \bar{O}$ e ciò è assurdo. Se $\alpha\cap\bar{C}$ fosse costituita dai $q+1$ punti di una generatrice di $\bar{C}$, si avrebbe che le rette $\alpha\cap\Sigma'$ ed $L(\infty)$ non sono sghembe ; quindi il piano α interseca $\bar{C}$ in una conica non degenere.

Indicando con $O_o,O_1,\dots,O_q$ i $q+1$ punti della conica E , denotiamo con $V(O_i,R_a)$, $\forall i=0,1,\dots,q$, $\forall a \in K$ la V_2^3 di Σ intersezione definita del cono C e del cono $Q_a^{(i)}$ di vertice il punto O_i e proiettante il regolo R_a.

PROPOSIZIONE 1.3 - Ogni $V(O_i,R_a)$ è una $V(O_o,R_b)$ per un opportuno $b\in K$.

Dim.:

Sia $O_i=(h,k,0,0,1)$ un punto di E ; si ha $sk^2-h^2-sk = 0$; sia inoltre $a=a_1+wa_2$. La $V(O_i,R_a)$ è esprimibile nel modo seguente :

$$\begin{cases} sx_2^2 - x_1^2 - sx_2t = 0 \\ y_1(a_2x_1+a_1x_2-a_2ht-a_1kt) = y_2(a_1x_1+sa_2x_2-a_1ht-sa_2kt) \end{cases}$$

La condizione che ogni punto P di questa varietà sia anche un punto di una

$V(O_o,\mathcal{R}_b)$, dà luogo alle seguenti uguaglianze :

$b_1 = s(a_1h+sa_2k)(s(a_2h+a_1k)^2-(a_1h+sa_2k)^2)$

$b_2 = s(a_2h+a_1k)(s(a_2h+a_1k)^2-(a_1h+sa_2k)^2)$

e si ha inoltre :

$a_2b_1-a_1b_2 = -1$. Quest'ultima uguaglianza risulta essere sempre soddisfatta per quei valori di b_1 e b_2 essendo equivalente alla seguente:

$$(sa_2^2 - a_1^2)(\ sk^2-h^2-sk) = 0$$

che è vera per le scelte fatte di h e k .

Indichiamo con $\mathcal{V}_o$ il seguente insieme di V_2^3 di Σ : $\{V(O_o,\mathcal{R}_b) / \forall\ b \in K\}$.

<u>TEOREMA 1.3</u> - <u>Il numero di elementi di $\mathcal{V}_o$ è esattamente $q+1$</u> .

Dim.:

Si ha subito l'asserto notando che il numero degli elementi di $\mathcal{V}_o$ è uguale al numero di regoli $\mathcal{R}_b$ di $\mathcal{S}$.

2. LE V_2^3 DI Σ COME SOTTOPIANI DI BAER .

Usando le notazioni di [6] , indichiamo con $\Pi = (\mathcal{P}, \mathcal{R}, I)$ il piano proietti- desarguesiano sopra il campo $K=F(w)$.

E' noto (cfr. [4],[5]) che Π può rappresentarsi con lo spazio Σ , fissando una fibrazione regolare $\mathcal{S}$ di un iperpiano Σ' di Σ . Esplicitiamo una tale rappresentazione nel modo seguente :

fissiamo una retta l_∞ in Π (da denominarsi *retta impropria* di Π) ed un riferimento (O,X_∞,Y_∞) in modo tale che la retta l_∞ è la rettta $X_\infty Y_\infty$.

Indichiamo con (x,y,t) coordinate proiettive omogenee per Π e $t=0$ l'equazione della retta l_∞ .

Definiamo una applicazione

(2.0) $\rho : \Pi \to \Sigma$

tale che si abbia :

(2.1) $l_\infty\rho = \Sigma'$;

(2.2) $\forall\ P \in l_\infty$, $P\rho = L(\infty)$ se $P = Y_\infty = (\infty)$,

$P\rho = L(m)$ se $P = (m)$,

con $L(\infty)$ ed $L(m)$ appartenenti ad $\mathcal{S}$;

(2.3) $\forall\ P \in \Pi - l_\infty$, $P\rho = (x_1,x_2,y_1,y_2,1)$ e $P\rho \in \Sigma - \Sigma'$,

se $P = (x,y,1)$ con $x=x_1+wx_2$, $y=y_1+wy_2$, $x_i,y_i \in F$,$\forall$ i=1,2 .

Se indichiamo con I' la incidenza in Σ , si ha

(2.4) $\forall\, r \in R$, $r\rho = \{P\rho \,/\, P\, I\, r\}$ è un piano di Σ , $P\rho\ I' r\rho$ ed è $r \cap \Sigma' \in S$.

Dalle (2.0, (2.1), (2.2); (2.3) e (2.4), si ha la

(2.5) $P\ I\ r$ se e solo se $P\rho\ I'\ r\rho$ $\forall P \in P$, $\forall\, r \in R$.

Da quanto detto si ha subito il seguente Lemma :

LEMMA 2.1 - Il piano Π è isomorfo, mediante ρ , alla struttura di incidenza Π (Σ, Σ', S) (cfr. [4], [5]).

Richiamiamo la definizione di *sottopiano di Baer* di un piano proiettivo .

DEFINIZIONE 2.1 - Un sottopiano B di un piano proiettivo P è *di Baer* se e solo se si ha :

B1) ogni punto di P è incidente una retta di B ;

B2) ogni retta di P è incidente un punto di B (cfr. [2], [6])

DEFINIZIONE 2.2 - Un sottopiano S di Π è denominato *propriamente proiettivo* se è $|l_\infty \cap S| \leq 1$.

LEMMA 2.2 - I sottopiani di Baer di un piano proiettivo desarguesiano P di ordine q^2 , passanti per un punto A e per q+1 punti di una retta r ($A \not I\, r$) sono esattamente q+1 .

Dim.:

Si ha subito l'asserto notando che il piano P è derivabile secondo Ostrom (cfr. [6], p.223) e che il piano derivato δP ha ordine q^2 .

Sia L'_∞ l'insieme dei q+1 piani del cono C di equazione (1.4) ed L'_0 l'insieme dei q^2 piani di Σ che sono rappresentati con equazioni della seguente forma :

(2.6) $y_1=m_1x_1+sm_2x_2$, $y_2=m_2x_1+m_1x_2-m_1$, $\forall\, m_1,m_2 \in F$

e sia $L'=L'_\infty \cup L'_0$.

Ogni piano $\ell' \in L'$ è immagine , tramite ρ , di una retta ℓ di Π che si esprime mediante equazioni del tipo :

i) $x=c_1+wc_2$, con $c_1,c_2 \in F$ ed $sc_2^2 - c_1^2 - sc_2 = 0$,

ovvero

ii) $y=(m_1+wm_2)x-m_1w \quad \forall\, m_1,m_2 \in F$

a seconda che sia :

i') $\ell' \in L'_\infty$ ovvero ii') $\ell' \in L'_0$

Indichiamo con $\mathcal{B}'$ l'insieme costituito dalla retta $L(\infty)$ e dai punti affini della V_2^3 di Σ definita nelle (1.0) (o le (1.4), (1.4')).

Sia B' la struttura di incidenza di Σ

(2.7) $B' = (\mathcal{B}', L', I')$

e indichiamo con $\mathcal{B}$ ed L rispettivamente i sottoinsiemi in Π di $\mathcal{P}$ e $\mathcal{R}$ che sono controimmagini, attraverso p , di $\mathcal{B}'$ e di L'.

Per il Lemma 2.1, si ha che la struttura di incidenza

$$B = (\mathcal{B}, L, I)$$

è una sottostruttura di incidenza di $\mathcal{H}$.

<u>TEOREMA 2.1</u> - <u>La struttura di incidenza B è un sottopiano di Baer di Π propriamente proiettivo.</u>

Dim.:

E' noto (cfr. [1]) che se in una struttura di incidenza S valgono le seguenti proprietà (indicate complessivamente $\begin{pmatrix} 1 & 3 & - \\ 2 & - & 6 \end{pmatrix}$) :

1 - il numero delle rette di S è q^2+q+1 ;

2 - il numero dei punti di S è q^2+q+1 ;

3 - ogni retta contiene q+1 punti ;

6 - due rette distinte si intersecano in uno ed un solo punto ,

allora S è un piano proiettivo di ordine q .

Dal Lemma 1.4, dalle i), ii) e dal Corollario 1.2, si ha :

$$|L| = q^2+q+1 \quad \text{e} \quad |\mathcal{B}| = q^2+q+1$$

cioè valgono per B le proprietà 1 e 2 sopra elencate.

Per provare la 3 , notiamo che (dalla (2.5)) è sufficiente contare il numero dei punti di $\mathcal{B}'$ incidenti ogni piano $\ell' = \ell\rho \ \forall \ell \in L$; si ha che $\forall \ell' \in L'_\infty$, i punti di $\mathcal{B}'$ che incidono ℓ' , sono $L(\infty)$ e i q punti affini della generatrice principale g di V_2^3 , contenuta in ℓ ; $\forall \ell' \in L'_0$, i punti di $\mathcal{B}'$ che incidono ℓ' sono precisamente i q+1 punti affini P della V_2^3:

$$P = (a,\ b,\ m_1a+sm_2b,\ m_2a+m_1b-m_1,\ 1)$$

tali che $sb^2-a^2-sa = 0$.

Per provare la 6 , è sufficiente eseguire semplici calcoli tenendo conto delle equazioni i) e ii) e delle coordinate dei punti della V_2^3 .

Sia A il piano affine sopra il campo K che si ottiene da Π considerando l_∞ come retta impropria e A' lo spazio affine di dimensione 4 sopra F che si ottiene da Σ considerando Σ' come iperpiano improprio.
Indichiamo con $A_2(K)$ e $A_4(F)$ rispettivamente il gruppo delle affinità di A e di A' (cfr.[7]).

<u>TEOREMA 2.2 - Esiste una immersione</u> $\underline{i: A_2(K) \to A_4(F)}$.

Dim.:

Sia $\alpha \in A_2(K)$ e sia A la matrice di α rispetto al riferimento fissato in A:

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} a & c & 0 \\ b & d & 0 \\ \hline h & h' & 1 \end{array}\right) \qquad a,b,c,d,h,h' \in K \quad e \quad ad-bc \neq 0 .$$

Definiamo una corrispondenza $\alpha' = (\alpha)i$ di A' che rispetto al riferimento si esprima mediante la seguente matrice A' a blocchi , 5x5 sopra F

$$A' = \left(\begin{array}{cc|c} A & C & 0 \\ B & D & 0 \\ \hline h_1 \quad h_2 & h_1' \quad h'_2 & 1 \end{array}\right) \qquad con \quad h_1+wh_2=h , \quad h_1'+wh_2'=h'$$

e dove

se X è un elemento dell'insieme A,B,C,D dei blocchi 2x2 che compaiono in A' , si ha

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ s\,x_2 & x_1 \end{pmatrix} \qquad con \quad x_1,x_2 \quad F .$$

Se si pone

$$ad-bc = (u-v) + w\,(u'-v')$$

con facili calcoli si ottiene :

$$\det A' = (u-v)^2 - s\,(u'-v')^2$$

cioè si ha $\det A' = 0$ se e solo se $\det A = 0$.
Quindi la corrispondenza α' è un elemento di $A_4(F)$.

Si noti che, per definizione, la i è iniettiva ; infine si può verificare che i è un morfismo gruppale.

<u>COROLLARIO 2.1 - Per ogni punto (retta)</u> $\underline{p}$ <u>di</u> $\underline{A}$ <u>, si ha</u> $\underline{p\alpha = p}$ <u>se e solo se</u>

è $(p\rho)\alpha' = p\rho$

Dim.:

Dimostriamo l'asserto provando che vale la seguente uguaglianza :

$$(p\rho)\alpha' = (p\alpha)\rho \quad .$$

Tale uguaglianza si ottiene con semplici calcoli, se p è un punto del piano A .

Indichiamo ora con π e π' le proiettività di A e di A' tali che $\pi_{/A} = \alpha$ $\pi'_{/A'} = \alpha'$.

Per ogni punto $p \in l_\infty$, è $(p\rho)\pi' = (p\pi)\rho$.

E' sufficiente ora esprimere ogni retta r di A come l'unione di un suo punto affine e del suo punto improprio per ottenere con semplici passaggi $(r\alpha)\rho = (r\rho)\alpha'$.

Indichiamo con l_o il sottoinsieme dei $q+1$ punti della retta $x = X\rho^{-1}$ di Π , controimmagini della conica E e sia $(O) = x \cap l_\infty$, $O = O\rho^{-1}$.

Indichiamo inoltre con R_m il sottoinsieme dei $q+1$ punti di l_∞ costituito dalle controimmagini, tramite ρ , del regolo R_m. Riferendoci al sottopiano B , si ha che R_w è precisamente l'insieme dei punti proiettati su l_∞ dal fascio di rette di B per O .

Sia B' un sottopiano di Baer di Π che ha a comune con B il punto Y_∞ e i punti di l_o . Indichiamo con R_k il sottoinsieme dei punti proiettati su l_∞ dal fascio di rette di B' per O . Poichè la fibrazione S è regolare, l'insieme R_k di rette di S corrispondente ad R_k , è un regolo.

Da quanto detto si ha subito il seguente :

LEMMA 2.3 - Si ha $R_w \cap R_k = Y_\infty ; (O)$, oppure è $B = B'$.

LEMMA 2.4 - Il sottopiano B' si può ottenere come immagine del sottopiano B tramite una affinità $\alpha \in A_2(K)$ di matrice

$$A = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Dim.:

Sia π la proiettività di Π di centro Y_∞ e asse x che trasforma il punto $(w) \in R_w$ nel punto $(k) \in R_k$. Se definiamo $\alpha = \pi_{/A}$, si ha che la matrice di α è precisamente la matrice indicata nell'asserto del Lemma, con $m = kw^{-1}$.

L'insieme $B\alpha$ è un sottopiano di Baer di Π che ha a comun e con B' i punti Y_∞,

(O) e i punti di l_o . Di più, se indichiamo con R'_k i punti proiettati su l_∞ dal fascio di rette di $B\alpha$ per il punto O , dal Lemma 2.3 si ha $(k)\in R_k \cap R'_k$, cioè $B\alpha = B'$.

Se indichiamo con V la V_2^3 intersezione definita dei coni C e Q_w e $\alpha'=(\alpha)i$, con α come nel lemma precedente , dal Teorema 2.2 e dal Corollario 2.1 si ha che $V'= V\alpha'$ è la varietà definita dalla intersezione dei coni quadrici C e Q_k e l'insieme dei punti affini di V' è l'immagine, tramite ρ , dei punti affini del sottopiano B'.

Da quanto detto, dal Teorema 1.3 e dai Lemmi 2.2, 2.4 , segue subito il

COROLLARIO 2.2 - Le $q+1$ varietà di Σ dell'insieme V_o , rappresentano tutti e soli i sottopiani di Baer propriamente proiettivi di Π passanti per Y_∞ e per i punti di l_o.

NOTA 2.1 - Poichè il piano Π è desarguesiano, dal Teorema 2.2 e dal Corollario 2.2, vengono caratterizzate le V_2^3 di Σ che rappresentano tutti i sottopiani di Baer di Π propriamente proiettivi ; più precisamente, queste varietà sono le V_2^3 che hanno per direttrice rettilinea una retta della fibrazione S e almeno una direttrice di ordine 2 che risulti immagine della conica E tramite una affinità del sottogruppo $i(A_2(K))$ di $A_4(F)$.

B I B L I O G R A F I A

[1] A.BARLOTTI : *"Unosservazione sulle proprietà che caratterizzano un piano grafico finito"* , BUMI (3) Vol.17 (1962) pp.394-398.

[2] A.BARLOTTI :*"On the definition of Baer subplanes of infinite planes"*, J.of Geometry Vol.3/ (1973) 87-92.

[3] A.BERTINI: *"Geometria proiettiva degli iperspazi"* E.Spoerri ed.Pisa (1907).

[4] R.H.BRUCK-R.C.BOSE : *"The construction of translation planes from projective spaces"*, J.of Algebra 1 (1964) pp.85-102.

[5] R.H.BRUCK-R.C.BOSE : *"Linear representations of projective planes in projective spaces"* , J.of Algebra 4 (1966) pp.117-172.

[6] P.DEMBOWSKI : *"Finite geoemetries"* , Springer-Verlag-Berlin-Heidelberg N.Y. (1968).

[7] S.MACLANE-G.BIRKHOFF : *"A survey of modern algebra"* ,Macmillan Co. N.Y. (1968).

[8] I.R.SHAFAREVICH : *"Foundations of alfebraic geometry"* , Russian Math. Surveys Vol.24 n.6 (1969) pp.1-178.

[9] R.VINCENTI :*"Fibrazioni di un $S_{3,q}$ indotte da fibrazioni di un S_{3,q^2} e rappresentazione di sottopiani di Baer di un piano proiettivo"* , Atti e Mem. Acc. Naz. Sci.Le.Arti, Modena Ser.VI,Vol.XIX (1977).

Ricevuto il 3/9/79